Schulinterner Lehrplan Mathematik Qualifikationsphase Grundkurs

■ Leistungskurs

Unterrichtsvorhaben I:	Unterrichtsvorhaben II:
Thema: *Eigenschaften von Funktionen (Höhere Ableitungen, Besondere Punkte von Funktionsgraphen, Funktionen bestimmen, Parameter)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren, Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Fortführung der Differentialrechnung • Funktionen als mathematische Modelle **Zeitbedarf**: GK 20 Std. – LK: 20Std.	**Thema**: *Das Integral, ein Schlüsselkonzept (Von der Änderungsrate zum Bestand, Integral- und Flächeninhalt, Integralfunktion)* **Zentrale Kompetenzen:** • Kommunizieren, Argumentieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Grundverständnis des Integralbegriffs • Integralrechnung **Zeitbedarf**: GK: 14 Std. – LK: 20 Std.

Schulinterner Lehrplan Mathematik Qualifikationsphase **Grundkurs**
■ Leistungskurs

Unterrichtsvorhaben III:	*Unterrichtsvorhaben IV:*
Thema: *Exponentialfunktion (natürlicher Logarithmus, Ableitungen)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Fortführung der Differentialrechnung **Zeitbedarf**: GK 8 Std. – LK: 8 Std.	**Thema**: *Untersuchung zusammengesetzter Funktionen (Produktregel, Kettenregel)* **Zentrale Kompetenzen:** • Argumentieren • Modellieren, Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Funktionen als mathematische Modelle • Fortführung der Differentialrechnung • Integralrechnung **Zeitbedarf**: GK: 8 Std. – LK: 15 Std.

Schulinterner Lehrplan Mathematik Qualifikationsphase Grundkurs ■ Leistungskurs

Unterrichtsvorhaben Q1-V : **Thema**: *Geraden und Skalarprodukt (Bewegungen und Schattenwurf)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Problemlösen **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Geraden) • Skalarprodukt **Zeitbedarf**: GK 7 Std. – LK: 7 Std.	*Unterrichtsvorhaben Q1-VI:* **Thema**: *Ebenen als Lösungsmengen linearer Gleichungen (Untersuchung geometrischer Objekte)* **Zentrale Kompetenzen:** • Argumentieren • Kommunizieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte • Lineare Gleichungssysteme **Zeitbedarf**: GK 10 Std. – LK: 11 Std.

Schulinterner Lehrplan Mathematik Qualifikationsphase **Grundkurs**
■ **Leistungskurs**

■ *Unterrichtsvorhaben VII* **Thema**: *Abstände und Winkel* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Lagebeziehungen und Abstände • Lineare Gleichungssysteme **Zeitbedarf**: LK: 16 Std.	

Schulinterner Lehrplan Mathematik Qualifikationsphase Grundkurs ■ Leistungskurs

Unterrichtsvorhaben VIII-1 **Thema**: *Wahrscheinlichkeit – Statistik: Ein Schlüsselkonzept* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Werkzeuge nutzen • Problemlösen **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen • Binomialverteilung **Zeitbedarf**: GK 15 Std. – LK: 16 Std.	■ *Unterrichtsvorhaben VIII-2* **Thema**: *Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Kommunizieren **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Testen von Hypothesen **Zeitbedarf**: LK: 11 Std.

Schulinterner Lehrplan Mathematik Qualifikationsphase **Grundkurs**

Leistungskurs

<u>Unterrichtsvorhaben IX</u> **Thema**: *Ist die Glocke normal?* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Normalverteilung **Zeitbedarf**: LK: 10 Std.	*<u>Unterrichtsvorhaben X:</u>* **Thema**: *Von Übergängen und Prozessen* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Argumentieren **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Stochastische Prozesse **Zeitbedarf**: GK 8 Std. – LK: 9 Std.

Schulinterner Lehrplan Mathematik Qualifikationsphase **Grundkurs**
■ **Leistungskurs**

Qualifikationsphase 1 Funktionen und Analysis

Thema I: Eigenschaften von Funktionen (Q1-A1)	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • lernen Funktionen als mathematische Modelle kennen - Fortführung der Differentialrechnung • beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten • führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese • bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“) • interpretieren Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang • interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext ■ und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionenscharen **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen	Das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. Es wird deshalb empfohlen, den Lernenden hinreichend Zeit zu geben, u. a. mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen. An Problemen, die auf quadratische Zielfunktionen führen, sollten auch unterschiedliche Lösungswege aufgezeigt und verglichen werden. Hier bietet es sich außerdem an, Lösungsverfahren auch ohne digitale Hilfsmittel einzuüben. An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“). Ein Verpackungsproblem (Dose oder Milchtüte) kann unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik untersucht werden. Abschließend empfiehlt es sich, ein Problem zu behandeln, das die Schülerinnen und Schüler nur durch systematisches Probieren oder anhand des Funktionsgraphen lösen können: Aufgabe zum „schnellsten Weg“. Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte (z. B. Neuverschuldung und Schulden oder Besucherströme in einen Freizeitpark/zu einer Messe und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Die Bestimmung der extremalen Steigung erfolgt zunächst über das Vorzeichenwechselkriterium (an den Nullstellen der zweiten Ableitung). Anknüpfend an die Einführungsphase können an einem Beispiel in einem geeigneten Kontext (z. B. Fotos von Brücken, Gebäuden,

einer realen Situation (strukturieren) vor • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle, erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation und beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (validieren) ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation • analysieren und strukturieren einfache und komplexe mathematische Probleme • erkennen und formulieren die Problemsituation • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, setzen ausgewählte Routineverfahren, auch hilfsmittelfrei, zur Lösung ein, berücksichtigen einschränkende Bedingungen und führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen, berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler*	Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst werden. Anschließend werden aus gegebenen Punkten Gleichungssysteme für die Parameter der Normalform aufgestellt. Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z. B. Trassierungsprobleme gewählt werden. Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet. Designobjekte, architektonische o.ä. Formen können zum Anlass genommen werden, die Funktionsklassen zur Modellierung auf ganzrationale Funktionen 3. oder 4. Grades zu erweitern und über gegebene Punkte, Symmetrieüberlegungen und Bedingungen an die Ableitung Gleichungen zur Bestimmung der Parameter aufzustellen. Hier bieten sich nach einem einführenden Beispiel offene Unterrichtsformen an. Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zunächst als Blackbox zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen im Zusammenhang mit der Validierung zu verwenden.

• nutzen digitale Werkzeuge zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen • nutzen die Darstellung von Funktionen (grafisch und als Wertetabelle), das zielgerichtete Variieren der Parameter von Funktionen sowie das grafische Messen von Steigungen • berechnen die Ableitung einer Funktion an einer Stelle • wählen Werkzeuge, die den Lösungsweg unterstützen	

Schulinterner Lehrplan Mathematik Qualifikationsphase Grundkurs
■ Leistungskurs

Thema II: Integral als Schlüsselkompetenz (Q1-A2)	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • entwickeln ein Grundverständnis des Integralbegriffs, der Integralrechnung • interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe, deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext und skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion • erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs • erläutern geometrisch-anschaulich den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion ■ begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs • bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen und nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate (**LK** auch der Randfunktion), ermitteln Flächeninhalte mit Hilfe von bestimmten (**LK** auch uneigentlichen) Integralen und bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen (**LK** auch Nachschlagewerken entnommenen) Stammfunktionen und numerisch (GK auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge)	Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb sollten hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen werden (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Der Einstieg kann über eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert. Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen" zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Falls die Lernenden entdecken, welche Auswirkungen dieser Umkehrprozess auf die Funktionsgleichung der „Bilanzfunktion" hat, kann dies zur Überleitung in das folgende Unterrichtsvorhaben genutzt werden. Die Ergebnisse der Gruppenarbeit können auf Plakaten festgehalten und in einem Museumsgang präsentiert werden. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert. Schülerinnen und Schüler sollen hier (wieder-)entdecken, dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist. Die Graphen der Änderungsrate und der Bestandsfunktion können die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe einer Tabellenkalkulation

■ erläutern den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion ■ bestimmen Flächeninhalte mithilfe von bestimmten und uneigentlichen Integralen. ■ bestimmen Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen, mit Hilfe von bestimmten und uneigentlichen Integralen **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf, unterstützen Vermutungen beispielgebunden, präzisieren diese mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur • stellen begründet Zusammenhänge zwischen Begriffen (Ober- / Unterbegriff) her und erklären vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus authentischen Texten, mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen • beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege, • wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus und	und eines Funktionenplotters gewinnen, vergleichen und Beziehungen zwischen diesen herstellen. Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert (ggf. auch im Lehrervortrag). Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet. In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Gesamtbeständen zur Verfügung. Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graphen werden die Schnittstellen in der Regel numerisch mit dem GTR bestimmt. Komplexere Übungsaufgaben sollten am Ende des Unterrichtsvorhabens bearbeitet werden, um Vernetzungen mit den Kompetenzen der bisherigen Unterrichtsvorhaben (Funktionsuntersuchungen, Aufstellen von Funktionen aus Bedingungen) herzustellen.

wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen • dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar • erstellen und präsentieren Ausarbeitungen ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • *nutzen digitale Werkzeuge zum* Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse • ermitteln hiermit den Wert eines bestimmten Integrales • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen	

Thema III: Die Exponentialfunktion- Funktionen als mathematische Modelle Fortführung der Differentialrechnung (Q1-A3)	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben Eigenschaften von Exponentialfunktionen • bilden die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion • beschreiben die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion ■ begründen diese ■ deuten die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen • bilden die Ableitung von Exponentialfunktionen mit beliebiger	Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens sollte eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen durch eine arbeitsteilige Untersuchung verschiedener Kontexte z. B. in Gruppenarbeit mit Präsentation stehen (Wachstum und Zerfall). Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der

Basis • bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen und deren Ableitung • untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mit Hilfe funktionaler Ansätze ■ verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsvorgängen und vergleichen die Qualität der Modellierung exemplarisch mit begrenztem Wachstum ■ nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion ■ bilden die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung, • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen Muster und Beziehungen • recherchieren Informationen • setzten ausgewählte Routineverfahren, auch hilfsmittelfrei,	durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. In einem Tabellenkalkulationsblatt wird für immer kleinere h das Verhalten des Differenzenquotienten beobachtet. Umgekehrt suchen die Lernenden zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle. Dazu könnten sie eine Wertetabelle des Differenzenquotienten aufstellen, die sie immer weiter verfeinern oder in der Grafik ihres GTR experimentieren, indem sie Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion legen. Mit diesem Ansatz kann in einem DGS auch der Graph der Ableitungsfunktion als Ortskurve gewonnen werden. Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich quasi automatisch die Frage, für welche Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen. An mindestens einem Beispiel sollte auch ein beschränktes Wachstum untersucht werden.

zur Lösung ein • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen, wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus • berücksichtigen einschränkende Bedingungen ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf und präzisieren mithilfe von Fachbegriffen • nutzen math. Regeln und Sätze für Begründungen • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können • beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihrer Reichweite und Übertragbarkeit ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen digitale Werkzeuge zum Erkunden, zum Darstellen von Funktionen (graphisch und als Wertetabelle) und grafischen Messen von Steigungen • berechnen die Ableitung einer Funktion an einer Stelle • reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge	

Schulinterner Lehrplan Mathematik Qualifikationsphase Grundkurs
■ Leistungskurs

Thema IV: Zusammengesetzte Funktionen- Funktionen als mathematische Modelle Fortführung der Differentialrechnung (Q1-A4)	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) • wenden die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen an ■ wenden die Produktregel zum Ableiten von beliebigen Funktionen an • wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an • bilden die Ableitungen von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten ■ bilden die Ableitungen von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten, ■ wenden die Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen an • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten ■ untersuchen den Einfluss von Parametern auf Eigenschaften von Funktionenscharen • interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext ■ führen Eigenschaften von zusammengesetzten Funktionen (Exponential- und Logarithmusfunktion als Teil einer Summe, eines Produktes oder Verkettung einer zusammengesetzten Funktion)	Im Zusammenhang mit der Modellierung von Wachstumsprozessen durch natürliche Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten wird die Kettenregel eingeführt, um auch (hilfsmittelfrei) Ableitungen für die entsprechenden Funktionsterme bilden zu können. An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen erarbeitet. In diesem Zusammenhang wird die Produktregel zum Ableiten eingeführt. In diesen Kontexten ergeben sich ebenfalls Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird. Parameter werden nur in konkreten Kontexten und nur exemplarisch variiert (keine systematische Untersuchung von Funktionenscharen). Dabei werden z. B. zahlenmäßige Änderungen des Funktionsterms bezüglich ihrer Auswirkung untersucht und im Hinblick auf den Kontext interpretiert.

argumentativ auf deren Bestandteile zurück ■ nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion f(x) = 1/x ■ erlernen verschiedene Integrationsverfahren **(Wahlthema)** **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf, unterstützen diese beispielgebunden und präzisieren mithilfe von Fachbegriffen • nutzen math. Regeln und Sätze für Begründungen sowie verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten • nutzen verschiedene Argumentationsstrategien • erkennen und vervollständigen lückenhafte Argumentationsketten, erkennen und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten ***Kommunizieren*** Die Schülerinnen und Schüler • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege, • verwenden Fachsprache und fachspezifische Notation	

Werkzeuge nutzen *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen digitale Werkzeuge zum zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen, • messen grafisch Steigungen • berechnen die Ableitung einer Funktion an einer Stelle • reflektieren und begründen Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge	

Schulinterner Lehrplan Mathematik Qualifikationsphase **Grundkurs**
■ **Leistungskurs**

Qualifikationsphase Analytische Geometrie und lineare Algebra

Thema I: Geraden und Skalarprodukt (Bewegungen und Schattenwurf) *(G1)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Geraden in Parameterform dar • interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext • stellen Strecken in Parameterform dar • untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden • interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen • berechnen Schnittpunkte von Geraden und deuten sie im Sachkontext • deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung)	Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und ggf. dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden. Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen sollen auch hilfsmittelfrei durchgeführt werden. Sie erlauben die Darstellung im räumlichen Koordinatensystem. Diese Darstellung sollte hinreichend geübt werden ■ Durch Einschränkung des Definitionsbereichs der Parameter werden Strahlen und Strecken einbezogen. *Auf dieser Grundlage können z. B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden.* *Inhaltlich schließt die Behandlung von Schrägbildern an das Thema E-G1 an.*

Schulinterner Lehrplan Mathematik Qualifikationsphase **Grundkurs**
■ **Leistungskurs**

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte): ***Modellieren*** Strukturieren *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *Mathematisieren* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle • erarbeiten mithilfe math. Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des math. Modells *Validieren* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation, • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierende Modelle für die Fragestellung ■ verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung **Werkzeuge nutzen** *Die Schülerinnen und Schüler* ■ *nutzen haptisches Werkzeug, geometrische Modelle und ggf. dynamische Geometrie-Software zum Darstellen von Objekten im Raum* ■ *nutzen den GTR*	*Hinweis: Bei zweidimensionalen Abbildungen (z. B. Fotografien) räumlicher Situationen geht in der Regel die Information über die Lagebeziehung von Objekten verloren. Verfeinerte Darstellungsweisen (z. B. unterbrochene Linien, schraffierte Flächen, gedrehtes Koordinatensystem) helfen, dies zu vermeiden und Lagebeziehungen systematisch zu untersuchen.* Der Fokus der Untersuchung von <u>Lagebeziehungen</u> liegt auf dem logischen Aspekt einer vollständigen Klassifizierung sowie einer präzisen Begriffsbildung (z. B. Trennung der Begriffe „parallel“, „echt parallel“, „identisch“). Flussdiagramme und Tabellen sind ein geeignetes Mittel, solche Algorithmen darzustellen. Es werden möglichst selbstständig solche Darstellungen entwickelt, die auf Lernplakaten dokumentiert, präsentiert, verglichen und hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit beurteilt werden können. In diesem Teil des Unterrichtsvorhabens sollen nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt werden, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fachsprache angeregt werden. Eine analoge Bearbeitung der Beziehungen zwischen Geraden und Ebenen bietet sich an. *Als Kontext kann dazu die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) aus wieder aufgegriffen werden.* Das <u>Skalarprodukt</u> wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dies wird zur

	Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt (alternativ zu einer Herleitung aus dem Kosinussatz). *<u>Bei hinreichend zur Verfügung stehender Zeit</u> kann in Anwendungskontexten (z. B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes, entdeckt werden, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. als Streckenlänge über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Bei dieser Problemstellung sollten unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen werden.*

<table>
<tr><td colspan="2">Thema II: Lineare Gleichungssysteme - Ebenen im Raum (G2)</td></tr>
<tr><td>Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler
• stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar
• beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
• wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an
• interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen
• stellen Ebenen in Parameterform dar
• untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen
• berechnen (Schnittpunkte von Geraden sowie) Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext

■ stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):
Problemlösen
Die Schülerinnen und Schüler
Erkunden
• wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen

Lösen</td><td>Punktproben sowie die Berechnung von Spurgeraden in den Grundebenen und von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen führen zunächst noch zu einfachen Gleichungssystemen. Die Achsenabschnitte erlauben eine Darstellung in einem räumlichen Koordinatensystem.

Die Untersuchung von Schattenwürfen eines Mastes auf eine Dachfläche z. B. motiviert eine Fortführung der systematischen Auseinandersetzung (Q-GK-A2) mit linearen Gleichungssystemen, mit der Matrix-Vektor-Schreibweise und mit dem Gauß-Verfahren.

Die Lösungsmengen werden mit dem GTR bestimmt, zentrale Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung sollte stets deutlich werden.</td></tr>
</table>

• *entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege* • *wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen* • *nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. [...] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […])* • *führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus,* *Reflektieren* • *vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten,* • *beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz* • *analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern.* **Kommunizieren** *Produzieren* • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang • wählen eine geeignete Darstellungsform begründet aus • dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar • erstellen und präsentieren Ausarbeitungen *Diskutieren* • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität	

Werkzeuge nutzen • nutzen digitale Werkzeuge zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen • stellen Objekte im Raum dar	

Schulinterner Lehrplan Mathematik Qualifikationsphase **Grundkurs**

■ **Leistungskurs**

Thema III: Abstände und Winkel (GIII) Dieses Thema ist nur für den Leistungskurs verbindlich.	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* ■ stellen Ebenen in Koordinatenform dar ■ stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum ■ Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen ■ mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum untersuchen (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung hier: Schwerpunkt Geraden - Ebene , Ebenen-Ebene) **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** *Die Schülerinnen und Schüler* *Erkunden* ■ *wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen* *Lösen* ■ entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege ■ wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen ■ verwenden heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. [...]Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien finden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […]) ■ Führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus	*Die unterschiedlichen Darstellungsformen der Ebenengleichung und ihre jeweilige geometrische Deutung (Koordinatenform, Achsenabschnittsform, Hesse-Normalenform als Sonderformen der Normalenform) werden gegenübergestellt, verglichen und in Beziehung gesetzt. Dabei intensiviert der kommunikative Austausch die fachlichen Aneignungsprozesse. Die Achsenabschnittsform erleichtert es, Ebenen zeichnerisch darzustellen. Die Verwendung einer räumlichen Geometriesoftware zur Darstellung der Lage von Ebenen ist sinnvoll.* *Ein Wechsel zwischen Koordinatenform und Parameterform der Ebene ist über die drei Achsenabschnitte möglich. Alternativ wird ein Normalenvektor mit Hilfe eines Gleichungssystems bestimmt.* *In Anwendungskontexten (z. B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes) wird entdeckt, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Hierbei werden unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen. Eine Vernetzung mit Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung bietet sich an.*

Reflektieren - Vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten - beurteilen und optimieren, Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz - analysieren und reflektieren.Ursachen von Fehlern **Kommunizieren** *Produzieren* - *verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,* - *wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus* - *dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar* - *erstellen und präsentieren Ausarbeitungen* *Diskutieren* - *vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlich* - *keit und fachsprachlichen Qualität* ***Werkzeuge nutzen*** - *nutzen den GTR zum Lösen von Gleichungen und linearen Gleichungssystemen* - *stellen ggf Objekte im Raum mit Hilfe von Geometrieprogrammen dar*	

Schulinterner Lehrplan Mathematik Qualifikationsphase **Grundkurs**

■ **Leistungskurs**

Thema VIII Wahrscheinlichkeit und Statistik: Ein Schlüsselkonzept (Q-S1)	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schülerinnen und Schüler • untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben, • erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen • verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente • erklären die Binomialverteilung und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten ■ erklären die kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten • beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung ■ nutzen die Sigma-Regeln für prognostische Aussagen • nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen • schließen anhand einer vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit	Die Begriffe Zufallsgröße und WK – Verteilung werden anhand verschiedener Glücksspiele eingeführt. Die Definition des Begriffs Erwartungswert erfolgt analog zur Betrachtung des Mittelwerts bei empirischen Häufigkeitsverteilungen. Das Grundverständnis von Streumaßen wird durch Rückgriff auf die Erfahrungen mit Boxplots in der Sek. I reaktiviert. Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert aber unterschiedlicher Streuung wird die Definition der Standardabweichung als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; anhand gezielter Veränderungen der Verteilung werden die Auswirkungen auf deren Kenngrößen untersucht und interpretiert. Anschließend werden diese Größen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt. Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette’ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d. h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung bietet sich eine Simulation des Galtonbrettes und die Betrachtung von Multiple-

Prozessbezogene Kompetenzen: **Modellieren** Die Schülerinnen und Schüler • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* **Werkzeuge nutzen** Die Schülerinnen und Schüler • nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen …Generieren von Zufallszahlen …Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen …Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen …Variieren der Parameter von Binomialverteilungen …Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung) **Argumentieren** Die Schülerinnen und Schüler • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten *(Begründen)*	Choice-Tests an. Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang *n* und Trefferwahrscheinlichkeit *p* erfolgt dabei durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR. Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung für ein zweistufiges Bernoulliexperiment plausibel gemacht werden. Auf eine allgemeingültige Herleitung wird verzichtet. Durch Erkunden wird festgestellt, dass unabhängig von *n* und *p* ca. 68% der Ergebnisse in der 1σ -Umgebung des Erwartungswertes liegen. *Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.* ■ In einer Tabellenkalkulation wird bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit multipliziert. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$. Das Konzept der σ -Umgebungen wird durch experimentelle Daten abgeleitet. Es wird benutzt, um Prognoseintervalle anzugeben, den notwendigen Stichprobenumfang für eine vorgegebene Genauigkeit zu bestimmen und um das $\frac{1}{\sqrt{n}}$ - Gesetz der großen Zahlen zu präzisieren.

	In verschiedenen Sachkontexten wird zunächst die Möglichkeit einer Modellierung der Realsituation mithilfe der Binomialverteilung überprüft. Die Grenzen des Modellierungsprozesses werden aufgezeigt und begründet. In diesem Zusammenhang werden geklärt: - die Beschreibung des Sachkontextes durch ein Zufallsexperiment - die Interpretation des Zufallsexperiments als Bernoullikette - die Definition der zu betrachtenden Zufallsgröße - die Unabhängigkeit der Ergebnisse - die Benennung von Stichprobenumfang *n* und Trefferwahrscheinlichkeit *p* Dies erfolgt in unterschiedlichsten Realkontexten, deren Bearbeitung auf vielfältigen Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). Prüfverfahren mit vorgegebenen Entscheidungsregeln bieten einen besonderen Anlass, um von einer (ein- oder mehrstufigen) Stichprobenentnahme aus einer Lieferung auf nicht bekannte Parameter in der Grundgesamtheit zu schließen. *Wenn genügend Unterrichtszeit zur Verfügung steht, können im Rahmen der beurteilenden Statistik vertiefend (und über den Kernlehrplan hinausgehend) Produzenten- und Abnehmerrisiken bestimmt werden.* *Hinweis: Eine Stichprobenentnahme kann auch auf dem GTR simuliert werden.*

Q-S-2 Die nun folgenden Kompetenzen sind nur für den Leistungskurs verbindlich. Die Schülerinnen und Schüler - interpretieren Hypothesentests bezogen auf den Sachkontext und das Erkenntnisinteresse (zwei- und einseitige Signifikanztests) - beschreiben und interpretieren Fehler 1. und 2. Art **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte)** **Modellieren** Die Schülerinnen und Schüler - erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf konkrete Fragestellungen (*Strukturieren*) - übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle, erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*) - beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*). **Kommunizieren** Die Schülerinnen und Schüler - erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen (*Rezipieren*) - formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege (*Produzieren*)	**Die Abschnitte 6 – 9 des Lehrbuchs (Hypothesentests) sind nur für den LK relevant** Dabei steht das Verständnis der Idee des Hypothesentests an zentraler Stelle, d. h. die Möglichkeit mit Hilfe eines mathematischen Instrumentariums einzuschätzen, ob Beobachtungen auf den Zufall zurückzuführen sind oder nicht. Ziel ist es, die Wahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen möglichst klein zu halten. Die Logik des Tests soll dabei an datengestützten gesellschaftlich relevanten Fragestellungen, z. B. Häufungen von Krankheitsfällen in bestimmten Regionen oder alltäglichen empirischen Phänomenen (z. B. Umfrageergebnisse aus dem Lokalteil der Zeitung) entwickelt werden. Im Rahmen eines realitätsnahen Kontextes werden folgende Fragen diskutiert: Welche Hypothesen werden aufgestellt? Wer formuliert diese mit welcher Interessenlage? Welche Fehlentscheidungen treten beim Testen auf? Welche Konsequenzen haben sie? Durch Untersuchung und Variation gegebener Entscheidungsregeln werden die Bedeutung des Signifikanzniveaus und der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Fehlentscheidungen 1. und 2. Art zur Beurteilung des Testverfahrens erarbeitet.

■ führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei (*Diskutieren*)	

<table>
<tr><td colspan="2">Thema IX Stetige Zufallsgrößen – Normalverteilung
Dieses Thema ist nur für den Leistungskurs verbindlich.</td></tr>
<tr><td>Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen
Die Schülerinnen und Schüler
■ unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion
■ beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion (Gauß'sche Glockenkurve)
■ untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen.
Prozessbezogene Kompetenzen
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
■ erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf konkrete Fragestellungen (Strukturieren)
■ übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle und erarbeiten innerhalb des mathematischen Modells mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung (Mathematisieren)
Problemlösen
Die Schülerinnen und Schüler
■ finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation (Erkunden)
■ überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren die Ergebnisse vor dem Hintergrund der Fragestellung,
■ analysieren und interpretieren Fehler (Reflektieren).
Kommunizieren
Die Schülerinnen und Schüler
■ nehmen begründet und konstruktiv Stellung zu</td><td>Normalverteilungen sind in der Stochastik bedeutsam, weil sich die Summenverteilung von genügend vielen unabhängigen Zufallsvariablen häufig durch eine Normalverteilung approximieren lässt. So soll der Einstieg in dieses Unterrichtsvorhaben über die Untersuchung von Summenverteilungen geschehen
.
Mit einer Tabellenkalkulation werden die Augensummen von zwei, drei, vier… Würfeln simuliert, wobei in der grafischen Darstellung die Glockenform zunehmend deutlicher wird.

Ergänzung für leistungsfähige Kurse: Gut geeignet ist auch die Simulation von Stichprobenmittelwerten aus einer (gleichverteilten) Grundgesamtheit.

Ergebnisse von Schulleistungstests oder Intelligenztests werden erst vergleichbar, wenn man sie hinsichtlich Mittelwert und Streuung normiert, was ein Anlass dafür ist, mit den Parametern μ und σ zu experimentieren. Auch Untersuchungen zu Mess- und Schätz-fehlern bieten einen anschaulichen, ggf. handlungsorientierten Zugang.

Da auf dem GTR die Normalverteilung einprogrammiert ist, spielt die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Satz von de Moivre-Laplace) für die Anwendungsbeispiele im Unterricht eine untergeordnete Rolle. Dennoch sollte bei genügender Zeit deren Herleitung als Vertiefung der Integralrechnung im Leistungskurs thematisiert werden, da der Übergang von der diskreten zur stetigen Verteilung in Analogie zur</td></tr>
</table>

mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen und führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei (*Diskutieren*). **Werkzeuge nutzen** Die Schülerinnen und Schüler ■ nutzen den GTR zum Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen.	Approximation von Flächen durch Produktsummen nachvollzogen werden kann (vgl. Q-LK-A3). Die Visualisierung erfolgt mithilfe des GTR. Theoretisch ist von Interesse, dass es sich bei der Gaußschen Glockenkurve um den Graphen einer Randfunktion handelt, zu deren Stammfunktion (Gaußsche Integralfunktion) kein Term angegeben werden kann.

<table>
<tr><th colspan="2">Thema X Stochastische Prozesse</th></tr>
<tr><th>Zu entwickelnde Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>

Inhaltsbezogene Kompetenzen
Die Schülerinnen und Schüler

beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen
verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände).

Prozessbezogene Kompetenzen
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler

treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen der realen Situation vor (Strukturieren)
ordnen einem mathematischen Modell verschieden passende Sachsituationen zu (Mathematisieren).

Problemlösen
Die Schülerinnen und Schüler

analysieren und strukturieren eine gegebene Problemsituation,
wählen heuristische Hilfsmittel aus, um die Situation zu erfassen,
erkennen Muster und Beziehungen (Erkunden).

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler

nutzen den GTR zum Rechnen mit Matrizen und Vektoren,
reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge.

</td><td>
Hinweis:
Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schülerinnen und Schüler modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.

Der Auftrag an Schülerinnen und Schüler, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt.

Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln.

Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an.
</td></tr>
</table>